

CALCULO DE INTERSECCIONES TOPOGRAFICAS UTILIZANDO EL PROMÉDIO PONDERADO

Irineu da Silva
Diego de Oliveira Martins
Paulo Cesar Lima Segantine
Departamento de Engenharia de Transportes – EESC – USP - Brasil
irineu@sc.usp.br
diegoolmartins@usp.br
seganta@sc.usp.br

RESUMEN

Los métodos planimétricos denominados “Intersección Directa” e “Intersección Inversa”, cuyas soluciones geométricas se basan en las mediciones angulares hechas desde puntos de coordenadas conocidas (bases de control) hasta el punto a determinar o, inversamente, desde éste a los puntos de coordenadas conocidas, tienen un valor fundamental para la determinación de las coordenadas de puntos del terreno, sobre los cuales no es posible medir las distancias hasta sus respectivas bases de control. Se aplican en estos casos conceptos de trigonometría plana, a partir de los cuales se establecen ecuaciones matemáticas para la determinación unívoca del punto desconocido. Se dicen en esos casos que se realiza una intersección simple, la cual no permite ningún análisis estadístico. Para subsanar ese problema, la solución recomendada consiste en realizar más observaciones angulares de las que son estrictamente necesarias y aplicar un cálculo de ajuste de observaciones topográficas por el Método de Mínimos Cuadrados. Sin embargo, la aplicación de cálculos de ajustes exige conocimientos matemáticos avanzados, los cuales no siempre son de dominio técnico. De esta forma, para solucionar el problema, se pueden aplicar métodos de cálculo basados en el promedio ponderado de las intersecciones topográficas, los cuales producen resultados muy próximos de los obtenidos por cálculos de ajustes, sin la necesidad de cálculos avanzados.

Para aclarar el problema expuesto en este artículo, además de presentar las ecuaciones relacionadas a los cálculos de las intersecciones topográficas utilizando el promedio ponderado y el cálculo de ajustes, se presentan los resultados de un trabajo práctico de mediciones topográficas de Intersecciones Directa e Inversa comparando los valores de las coordenadas determinadas y sus respectivas precisiones.

1. INTRODUCCIÓN

Los métodos planimétricos para la determinación de coordenadas de puntos topográficos, denominados “Intersección Directa” e “Intersección Inversa”, permiten obtener las coordenadas de uno o de varios puntos topográficos sobre el terreno apoyándose en vértices con coordenadas conocidas, determinadas en fases previas de

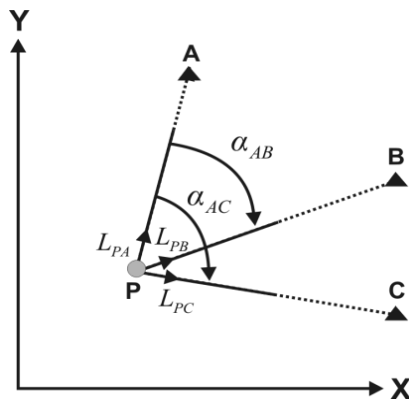
relevamientos topográficos. La aplicación fundamental de esos métodos ocurre en situaciones en que se necesitan replantear nuevos puntos sobre el terreno solamente con observaciones angulares, sin mediciones de distancias. Ejemplos clásicos de aplicaciones de esos métodos son la densificación de redes topográficas y la determinación de puntos auxiliares de replanteo en obras de minería o de subdivisiones urbanas.

Las ecuaciones para esas determinaciones son muy bien conocidas y no representan ninguna dificultad para sus aplicaciones prácticas. Para la Intersección Directa se miden las direcciones desde dos bases de control hasta el punto a determinar, mientras que para la Intersección Inversa se miden las direcciones desde el punto a determinar hasta tres bases de control. De esta forma, se tiene una solución única para las coordenadas del punto desconocido, la cual no permite ningún análisis estadístico. Para subsanar ese problema, la solución recomendada consiste en realizar más observaciones angulares de las que son estrictamente necesarias y aplicar un cálculo de ajuste de observaciones topográficas por el Método de Mínimos Cuadrados, conforme presentado en las secciones subsecuentes. Sin embargo, la aplicación de cálculos de ajustes exige conocimientos matemáticos avanzados, los cuales no siempre son de dominio técnico. De esta forma, para solucionar el problema, se pueden aplicar métodos de cálculo basados en el promedio ponderado de las intersecciones topográficas, a partir de los cuales se obtienen resultados muy próximos a los obtenidos por cálculos de ajustes, sin la necesidad de cálculos avanzados, como se demuestra a seguir.

2. LA INTERSECCIÓN INVERSA

La Intersección Inversa es también comúnmente denominada Problema de Pothenot. Según Peña, J. S. [2002], el primero en resolver el problema de la Intersección Inversa fue el holandés Willbord Snellius en su obra "Eratosthenes batavus", publicada en 1624. Laurent Pothenot presentó un trabajo sobre el tema en 1692 y varios otros autores han estudiado esa materia a lo largo de los años. A pesar de eso, el problema sigue conociéndose popularmente como Problema de Pothenot.

Una intersección inversa consiste en determinar las coordenadas de una estación situada en un punto (P), desde la cual se hicieron observaciones de direcciones a tres puntos de coordenadas conocidas, conforme indicado en la Figura 1. La finalidad del método es calcular las coordenadas de (P) y también las orientaciones de las alineaciones formadas entre el punto (P) y los puntos visualizados.



Conocidos:

Punto A: $A: (x_A, y_A)$

Punto B: $B: (x_B, y_B)$

Punto C: $C: (x_C, y_C)$

Medidos:

Direcciones: L_{PA}, L_{PB}, L_{PC}

Calcular:

Coordenadas de P: $P: (x_P, y_P)$

Figura 1: Relaciones geométricas de la Intersección Inversa simple.

La solución al problema es alcanzada suponiendo una intersección de tres líneas, cuyos azimuts son conocidos. De esa forma, considerando,

$\alpha_{AB} = (L_{PB} - L_{PA})$, diferencia entre las observaciones de las direcciones PB y PA.

$\alpha_{AC} = (L_{PC} - L_{PA})$, diferencia entre las observaciones de las direcciones PC y PA.

Las coordenadas de la estación (P) serán dadas por:

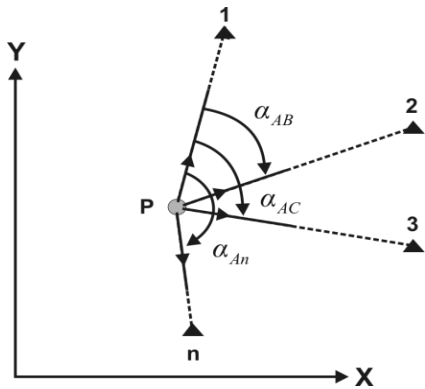
$$\tan \varphi = \frac{(x_A - x_B) * \cotan \alpha_{AB} - (x_A - x_C) * \cotan \alpha_{AC} + (y_B - y_C)}{(y_A - y_B) * \cotan \alpha_{AB} - (y_A - y_C) * \cotan \alpha_{AC} - (x_B - x_C)} \quad (1)$$

$$y_P = y_A + \frac{(x_A - x_B) * (\cotan \alpha_{AB} - \tan \varphi) - (y_A - y_B) * (1 + \cotan \alpha_{AB} \tan \varphi)}{1 + \tan^2 \varphi} \quad (2)$$

$$x_P = x_A + (y_P - y_A) * \tan \varphi \quad (3)$$

Sustituyéndose el índice B por C se obtiene una segunda ecuación para el cálculo de y_P .

Para obtener resultados más consistentes para las coordenadas del punto (P), se puede aumentar la cantidad de observaciones de direcciones, conforme indicado en la Figura 2. En este caso, habrá más visualizaciones de que las estrictamente necesarias, o en otras palabras, un exceso de visualizaciones. De esta forma, el problema se torna súper determinado y entonces la solución consistirá en calcular “las mejores coordenadas” para el punto (P) considerando las diferentes combinaciones de visualizaciones.



Conocidos:

Puntos 1,2,3, ..., n: (x_i, y_i)

Medidos:

Direcciones: $L_{P1}, L_{P2}, L_{P3}, \dots, L_{Pn}$

Calcular:

Coordenadas de P: $P: (x_p, y_p)$

Figura 2: Relaciones geométricas de la Intersección Inversa múltiple.

En estas condiciones, las coordenadas del punto (P) se pueden determinar aplicándose dos métodos de cálculo: la solución por el Método de Mínimos Cuadrados y la solución por Promedio Ponderado, conforme presentado en las secciones siguientes.

2.1 INTERSECCIÓN INVERSA POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Para esta determinación considérese un punto $P_0 (X_0, Y_0)$ al cual se atribuye los desplazamientos dx y dy para obtenerse el punto $P (X, Y)$, conforme indicado en la Figura 3.

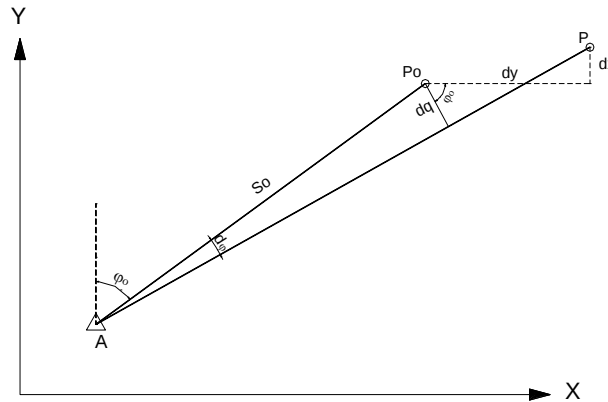


Figura 3: Relaciones geométricas entre el punto provisional P_0 y el punto P.

De acuerdo con la figura, son obtenidas las relaciones matemáticas indicadas a seguir:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + dx \\ Y &= Y_0 + dy \end{aligned} \quad (4)$$

$$dq = s_0 + d\varphi \quad (5)$$

$$dq = dx * \cos \varphi_0 - dy * \sin \varphi_0 \quad (6)$$

Donde se tendrá que:

$$d\varphi = \frac{\cos \varphi_0}{s_0} dx - \frac{\sin \varphi_0}{s_0} dy \quad (7)$$

Esta relación generalmente se escribe de la siguiente forma:

$$d\varphi = a * dx + b * dy \quad (8)$$

$$a = \frac{\cos \varphi_0}{s_0} \quad b = \frac{\sin \varphi_0}{s_0} \quad (9)$$

Considérese ahora el caso de la Intersección Inversa Múltiple indicada en la Figura 4, en la cual se tienen las direcciones r_j medidas desde la estación (P) a puntos de coordenadas conocidas, partiéndose con una orientación ω cualquiera. De acuerdo con ese modelo geométrico, el problema se soluciona considerándose la corrección v_j , que se debe adicionar en cada dirección observada, para determinar el azimut compensado Φ_j , conforme indicado a seguir:

$$\Phi_j = r_j + \omega + v_j \quad (10)$$

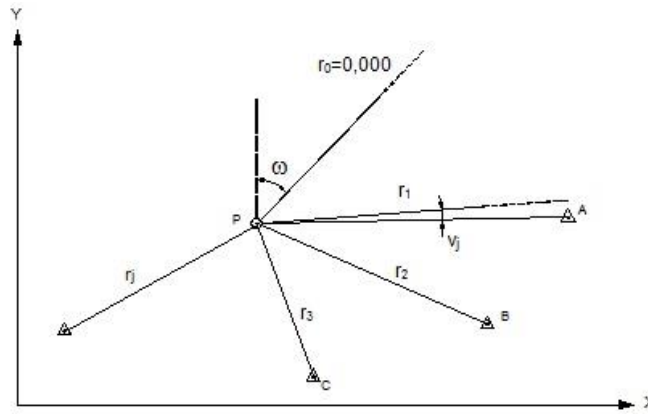


Figura 4: Elementos geométricos de la Intersección Inversa Múltiple para el cálculo por el Método de Mínimos Cuadrados.

Como las coordenadas del punto provisional P_0 son conocidas, se pueden calcular los azimuts provisionales φ_{j0} . Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (7), se pueden determinar las variaciones $d\varphi_j$ en función de las variaciones de coordenadas dx y dy del punto provisional. Donde se tendrá que:

$$\Phi_j = \varphi_{j0} + d\varphi_j \quad (11)$$

En seguida, considerando las ecuaciones (10) y (11) se puede escribir que:

$$\Phi_j = r_j + \omega + v_j = \varphi_{j0} + d\varphi_j \quad (12)$$

Por otro lado, introduciendo un valor provisional ω_0 para ω , se obtienen las ecuaciones indicadas a seguir:

$$\omega = \omega_0 + d\omega \quad (13)$$

$$\omega_0 = \varphi_{j0} - r_j \quad (14)$$

Considerando las ecuaciones (13) y (8) se puede escribir la ecuación (12) como sigue:

$$\Phi_j = r_j + \omega_0 + d\omega + v_j = \varphi_{j0} + a^* dx + b^* dy \quad (15)$$

De donde se obtendrá la ecuación de errores,

$$v_j = -d\omega + a^* dx + b^* dy + \varphi_{j0} - \omega_0 - r_j \quad (16)$$

La solución del sistema de ecuaciones de errores permite determinar los valores compensados para Φ_j y, de esa forma, las coordenadas del punto (P).

2.2 INTERSECCIÓN INVERSA POR EL PROMEDIO PONDERADO

Para el cálculo de las coordenadas del punto (P) por el Promedio Ponderado, considérese la Figura 2. De acuerdo con los datos indicados en la figura, se puede calcular las coordenadas del punto (P) a partir de n observaciones, combinadas tres a tres, las cuales generan N intersecciones inversas, conforme indicado en la ecuación (17).

$$N = \frac{n*(n-1)*(n-2)}{6} \quad \text{intersecciones inversas} \quad (17)$$

Si todas las observaciones fueran consideradas con la misma calidad, el resultado final para las coordenadas del punto (P) se obtendría por el promedio aritmético de las N intersecciones. Entretanto, en la mayoría de los casos, estas no poseen la misma calidad, una vez que son medidas con distancias y posiciones diferentes. El resultado final, en este caso, se obtiene por el promedio ponderado de las N intersecciones, adoptándose pesos diferenciados para cada intersección inversa de acuerdo con la ecuación (18) indicada a seguir:

$$p_{ijk} = p_i * p_j * p_k \left(\frac{\text{sen}\alpha_{ij}}{d_{pi} * d_{pj}} + \frac{\text{sen}\alpha_{jk}}{d_{pj} * d_{pk}} + \frac{\text{sen}\alpha_{ki}}{d_{pi} * d_{pk}} \right)^2 \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-2) \quad j = 2, 3, \dots, (n-1) \quad k = 3, 4, \dots, n$$

Donde,

$$\alpha_{ij} = L_{pj} - L_{pi}$$

p_{ijk} = peso para la intersección i,j,k

p_i, p_j, p_k = peso para las direcciones observadas

d_{pi} = distancias horizontales calculadas en función del resultado obtenido para las coordenadas del punto (P) a partir del cálculo de la primera intersección inversa.

Los valores para los pesos p_i, p_j y p_k se pueden determinar considerándose las condiciones indicadas a seguir:

$$p_i = p_j = p_k = 1$$

O,

$$p_i = d_{pi}^2, \quad p_j = d_{pj}^2, \quad p_k = d_{pk}^2$$

Con los pesos calculados, los valores finales para las coordenadas del punto (P) serán dados conforme las ecuaciones (19).

$$\bar{X}_P = \frac{P'^T X_P}{e^T P'}; \quad \bar{Y}_P = \frac{P'^T Y_P}{e^T P'} \quad (19)$$

Donde,

$$X_P = \begin{bmatrix} x_{ijk(1)} \\ x_{ijk(2)} \\ \vdots \\ x_{ijk(n)} \end{bmatrix} \quad Y_P = \begin{bmatrix} y_{ijk(1)} \\ y_{ijk(2)} \\ \vdots \\ y_{ijk(n)} \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} p_{ijk(1)} \\ p_{ijk(2)} \\ \vdots \\ p_{ijk(n)} \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{X}_P$ = coordenada (x) final del punto (P)

$\bar{Y}_P$ = coordenada (y) final del punto (P)

Las precisiones ($s_{\bar{x}}$) y ($s_{\bar{y}}$) son calculadas de acuerdo con las ecuaciones (20) y (21), respectivamente.

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{V_X^T P V_X}{(n-3)e^T P'} \quad (20)$$

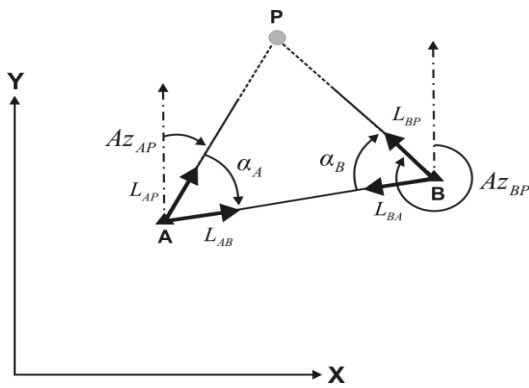
$$s_{\bar{y}}^2 = \frac{V_Y^T P V_Y}{(n-3)e^T P'} \quad (21)$$

Donde,

$$V_X = \begin{bmatrix} \bar{x}_p - x_{ijk(1)} \\ \bar{x}_p - x_{ijk(2)} \\ \bar{x}_p - x_{ijk(n)} \end{bmatrix} \quad V_Y = \begin{bmatrix} \bar{y}_p - y_{ijk(1)} \\ \bar{y}_p - y_{ijk(2)} \\ \bar{y}_p - y_{ijk(n)} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_{ijk(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{ijk(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{ijk(n)} \end{bmatrix}$$

3. LA INTERSECCIÓN DIRECTA

La determinación de las coordenadas de un punto (P) a partir del método de la Intersección Directa consiste en visualizar el punto a determinar a partir de dos puntos de coordenadas conocidas observándose apenas direcciones, conforme indicado en la Figura 5. De esta forma se obtienen las coordenadas del punto observado sin la necesidad de colocar un reflector en el punto.



Conocidos:

Punto A: $A: (x_A, y_A)$

Punto B: $B: (x_B, y_B)$

Medidos:

Direcciones: $L_{AP}, L_{AB}, L_{BA}, L_{BP}$

Calcular:

Coordenadas de P: $P: (x_P, y_P)$

Figura 5: Relaciones geométricas de la Intersección Directa.

El método de cálculo más simple para calcular las coordenadas del punto (P) es el método de las tangentes, como indicado a seguir:

Si,

$$|\tan Az_{BP}| < |\tan Az_{AP}|$$

$$Y_P = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) * \tan Az_{BP}}{\tan Az_{AP} - \tan Az_{BP}} \quad (22)$$

$$X_P = X_B + (Y_P - Y_B) * \tan Az_{BP} \quad (23)$$

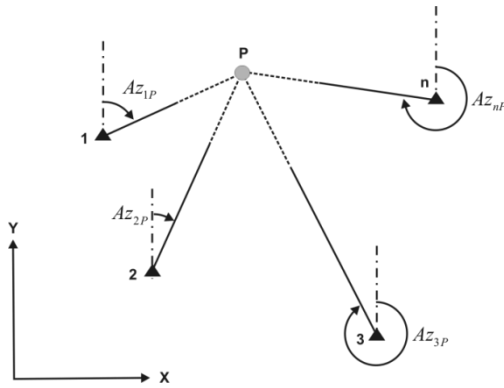
Si,

$$|\tan Az_{AP}| > |\tan Az_{BP}|$$

$$Y_P = Y_B + \frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) * \tan Az_{AP}}{\tan Az_{BP} - \tan Az_{AP}} \quad (24)$$

$$X_P = X_A + (Y_P - Y_A) * \tan Az_{AP} \quad (25)$$

Para obtener resultados más consistentes para las coordenadas del punto (P), se puede aumentar la cantidad de observaciones de direcciones, conforme indicado en la Figura 6. En este caso habrán más visualizaciones de que las estrictamente necesarias, o en otras palabras, un exceso de visualizaciones. El problema se torna súper determinado y la solución consistirá en calcular “las mejores coordenadas” para el punto (P) considerando las diferentes combinaciones de visualizaciones.



Dados:

Puntos 1, 2, 3, n: (x_i, y_i)

Medidos:

$L_{iP}, L_{i,i+1}$ Direcciones entre los puntos de coordenadas conocidas y el punto (P)

Calcular:

Coordenadas de P: $P: (x_P, y_P)$

Figura 6: Relaciones geométricas para la Intersección Directa múltiple.

Las coordenadas del punto (P) se pueden determinar aplicándose dos métodos de cálculo: la solución por el Método de Mínimos Cuadrados y la solución por el Promedio Ponderado.

3.1 INTERSECCIÓN DIRECTA POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Para el cálculo de las coordenadas del punto (P) por el Método de Mínimos Cuadrados, considérese la Figura 7. De acuerdo con la figura y con el valor del punto provisional P_0 determinado como mencionado anteriormente, se pueden definir las ecuaciones (4) y (11). Por otro lado, una dirección directa observada está orientada por su línea de referencia de manera a generar el azimuth observado φ_j , al cual es necesario adicionar una corrección (v_j) para determinar su azimuth compensado Φ_j , como indicado en la ecuación (26).

$$\Phi_j = \varphi_j + v_j \quad (26)$$

En seguida, considerando las ecuaciones (11) y (26) se puede escribir que:

$$\Phi_j = \varphi_j + v_j = \varphi_{j0} + d\varphi_j \quad (27)$$

Considerando las ecuaciones (27) y (8) se puede escribir la ecuación (28) como sigue:

$$\Phi_j = \varphi_j + v_j = \varphi_{j0} + a^* dx + b^* dy \quad (28)$$

Donde se tendrá la ecuación de errores,

$$v_j = a^* dx + b^* dy + \varphi_{j0} - \varphi_j \quad (29)$$

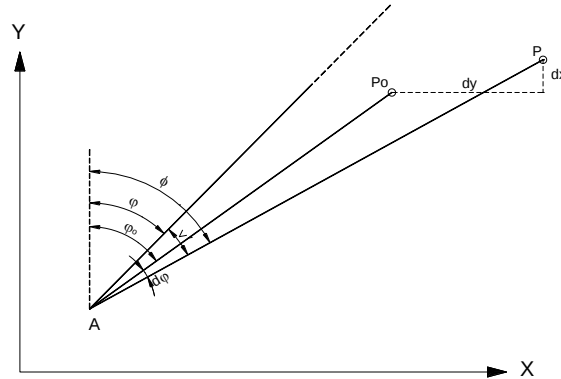


Figura 7: Relaciones geométricas para el cálculo del punto compensado (P).

La solución del sistema de ecuaciones de errores permite determinar los valores compensados para Φ_j y, de esa forma, las coordenadas del punto P.

3.2 INTERSECCIÓN DIRECTA POR EL PROMEDIO PONDERADO

Para el cálculo de las coordenadas del punto (P) por el promedio ponderado, considérese la Figura 6. De acuerdo con los datos indicados en la figura, se puede calcular las coordenadas del punto (P) a partir de n observaciones, combinadas dos a dos, las cuales generan N intersecciones directas, conforme indicado en la ecuación (30).

$$N = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{intersecciones directas} \quad (30)$$

Si todas las observaciones fueran consideradas con la misma calidad, el resultado final para las coordenadas del punto (P) se obtendría por el promedio aritmético de las N intersecciones. Entretanto, en la mayoría de los casos, estas no poseen la misma calidad, una vez que son medidas con distancias y posiciones diferentes. El resultado final, en este caso, se obtiene por el promedio ponderado de las N intersecciones, adoptándose pesos diferenciados para cada intersección directa de acuerdo con la ecuación (31) indicada a seguir:

$$p_{i,j} = p_i * p_j \frac{\text{sen}^2(Az_{jp} - Az_{ip})}{d_{ip}^2 * d_{jp}^2} \quad (31)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Donde,

$p_{i,j}$ = peso de la intersección i,j

p_i, p_j = peso de las direcciones observadas

Az_{ip}, d_{ip} = valores calculados en función de las coordenadas de los puntos conocidos

Los valores para los pesos p_i y p_j se pueden determinar considerándose las condiciones indicadas a seguir:

$$p_i = p_j = 1$$

O,

$$p_i = d_{ip}^2, \quad p_j = d_{jp}^2$$

Con los pesos calculados, los valores finales para las coordenadas del punto (P) vendrán dadas, conforme indicado en las ecuaciones (32).

$$\bar{X}_p = \frac{P'^T X_p}{e^T P'} ; \quad \bar{Y}_p = \frac{P'^T Y_p}{e^T P'} \quad (32)$$

Donde,

$$X_p = \begin{bmatrix} x_{ij(1)} \\ x_{ij(2)} \\ \vdots \\ x_{ij(n)} \end{bmatrix} \quad Y_p = \begin{bmatrix} y_{ij(1)} \\ y_{ij(2)} \\ \vdots \\ y_{ij(n)} \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} p_{ij(1)} \\ p_{ij(2)} \\ \vdots \\ p_{ij(n)} \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{X}_p$ = coordenada (x) final del punto (P)

$\bar{Y}_p$ = coordenada (y) final del punto (P)

Las precisiones $(s_{\bar{x}})$ y $(s_{\bar{y}})$ son calculadas de acuerdo con las ecuaciones (33) y (34), respectivamente.

$$s_X^2 = \frac{V_X^T P V_X}{(n-2)e^T P'} \quad (33)$$

$$s_Y^2 = \frac{V_Y^T P V_Y}{(n-2)e^T P'} \quad (34)$$

Donde,

$$V_X = \begin{bmatrix} \bar{x}_p - x_{ij(1)} \\ \bar{x}_p - x_{ij(2)} \\ \vdots \\ \bar{x}_p - x_{ij(n)} \end{bmatrix} \quad V_Y = \begin{bmatrix} \bar{y}_p - y_{ij(1)} \\ \bar{y}_p - y_{ij(2)} \\ \vdots \\ \bar{y}_p - y_{ij(n)} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_{ij(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{ij(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{ij(n)} \end{bmatrix}$$

4. EJEMPLO APLICATIVO

Para comparar los resultados de la Intersección Inversa e Intersección Directa aplicándose los métodos de Mínimos Cuadrados y del Promedio Ponderado, se realizó un trabajo de campo en el que fueron medidas cinco direcciones, como indicado en la Figura 8. El punto (P) indicado en la figura es el punto cuyas coordenadas se quieren determinar.



Figura 8: Rede de puntos medidos en el campo

Los valores medidos en campo para la Intersección Inversa están indicados en la Tabla 1 y los valores para la Intersección Directa en la Tabla 2.

Tabla 1: Valores de coordenadas y direcciones medidos en el campo para la Intersección Inversa.

Intersección Inversa			
Punto	X [m]	Y [m]	Dirección Observada
P2	5.217,554	966,739	200° 49' 56"
P1	5.000,000	1.000,000	221° 06' 37"
P3	5.000,000	1.445,616	266° 53' 52"
P4	5.039,270	2.020,395	326° 16' 31"

Tabla 2: Valores de coordenadas y direcciones medidos en el campo para la Intersección Directa

Intersección Directa			
Punto	X [m]	Y [m]	Dirección Observada
P1	5.000,000	1.000,000	41° 06' 38"
P3	5.000,000	1.445,616	86° 53' 57"
P4	5.039,270	2.020,395	146° 16' 29"
P2	5.217,554	966,739	20° 49' 49"

4.1 RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Aplicando el Método de Mínimos Cuadrados para la solución de las ecuaciones de errores indicadas en las secciones 2.1 y 3.1, se obtuvieron los resultados indicados en la Tabla 3.

Tabla 3: Resultados para las Intersecciones Inversa y Directa aplicándose el Método de Mínimos Cuadrados

Método de Mínimos Cuadrados				
Intersección	X [m]	σX [mm]	Y [m]	σY [mm]
Inversa (P)	5.408,188	± 2,6	1.467,739	± 1,3
Directa (P)	5.408,182	± 6,4	1.467,737	± 6,0

4.2 RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL PROMEDIO PONDERADO

Para la aplicación del método del promedio ponderado, primeramente es necesario calcular las N intersecciones, conforme indicado en la ecuación (17) para la Intersección Inversa y en la ecuación (30) para la Intersección Directa. En seguida, considerándose las estrategias de ponderación indicadas en las secciones 2.2 y 3.2, se obtuvieron los valores de pesos indicados en las Tablas 4 y 5.

Tabla 4: Resultados del cálculo de intersección inversa simple para cada una de las N intersecciones inversas

Intersección Inversa Simple – Coordenadas del Punto (P)			
Parcial	X [m]	Y [m]	Pesos
P2-P1-P3	5.408,232	1.467,699	1
P1-P3-P4	5.408,186	1.467,735	220
P3-P4-P2	5.408,189	1.467,738	314
P1-P4-P2	5.408,181	1.467,758	34

Tabla 5: Resultados del cálculo de intersección inversa simple para cada una de las N intersecciones directas

Intersección Directa Simple – Coordenadas del Punto (P)			
Parcial	X [m]	Y [m]	Pesos
P1-P3	5.408,177	1.467,728	4
P3-P4	5.408,204	1.467,730	6
P1-P4	5.408,193	1.467,747	8
P2-P1	5.408,156	1.467,704	1
P2-P3	5.408,165	1.467,727	7
P2-P4	5.408,180	1.467,767	6

Con los pesos calculados adecuadamente, se obtuvieron las coordenadas compensadas y sus precisiones para la Intersección Inversa y Directa, conforme indicado en la Tabla 6.

Tabla 6: Resultados para la Intersección Inversa y Directa aplicándose el método del promedio ponderado

Método del Promedio Ponderado – Coordenadas del Punto (P)				
Intersección	X [m]	σX [mm]	Y [m]	σY [mm]
Inversa	5.408,188	$\pm 2,4$	1.467,738	$\pm 5,5$
Directa	5.408,183	$\pm 7,1$	1.467,739	$\pm 4,5$

Con los valores indicados arriba se pueden comparar los resultados obtenidos con la utilización del Método de Mínimos Cuadrados y del Método del Promedio Ponderado para la Intersección Inversa y la Intersección directa. La Tabla 7 muestra los valores comparativos.

Tabla 7: Comparación de los resultados para la Intersección Inversa y Directa aplicándose el método del Mínimo Cuadrado y el Método del Promedio Ponderado

Comparación de los Resultados			
Diferencias	ΔX [mm]	ΔY [mm]	Vector [mm]
Inversa MPP x Directa MPP	5	-1	5
Inversa MMC x Directa MMC	6	2	6
Inversa MPP x Inversa MMC	0	-1	1
Directa MPP x Directa MMC	-1	-2	2

5. CONCLUSIONES

Como se puede notar en las tablas de la sección 4, los resultados indican que la aplicación del Método del Promedio Ponderado puede ser considerada como una alternativa para los cálculos de Intersecciones Inversa y Directa cuando no se puede aplicar el Método de Mínimos Cuadrados. Para las mediciones de campo utilizadas en este trabajo, se obtuvieron desvíos máximos de 1 mm para las coordenadas calculadas por la Intersección Inversa y de 2 mm para las coordenadas calculadas por la Intersección Directa, en una situación en que los desvíos máximos son del orden de 5mm para el Método del Promedio Ponderado y de 6 mm para el Método de Mínimos Cuadrados.

Es importante señalar que para el método del Promedio Ponderado, las estrategias de ponderación propuestas para ambas las intersecciones son sensibles a la geometría de la red. Como puede verse en el trabajo de campo, cuanto más equilátero es el triángulo más alto es su peso. Además, debe tenerse en cuenta que la geometría de la red interfiere más en la ponderación para la Intersección Inversa de que para la Intersección Directa.

6. Bibliografía

Peña, S. J. - La Intersección Inversa: Método Geométrico, Topográfico y Cartográfico. XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. Santander, España, 2002.

Silva, I. Segantine, P. C. L. – Topografia para Engenharia: Teoria e Prática de Geomática. Elsevier Editora, Rio de Janeiro, Brasil, 2015.